# Международно състезание “Европейско Кенгуру”

**19 март 2016 г.**

## ТЕМА за 11 и 12 клас

**След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!**

**1.** Сумата от годините на Тома и Иван е $23$, сумата от годините на Иван и Алекс е $24$, а сумата от годините на Тома и Алекс е $25$. На колко години е най-големият от тримата?

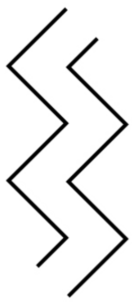
**A)** 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

**2.** Сумата $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$ е равна на:

**A)** $\frac{3}{111}$ **B)** $\frac{111}{1110}$ **C)** $\frac{111}{1000}$ **D)** $\frac{3}{1000}$ **E)** $\frac{3}{1110}$

**3.** По-долу са изобразени 5 различни реки. За коя от тях е нарушено условието: „Възможно най-късият мост, построен от произволна точка на единия бряг на реката до другия, има постоянна дължина.“?

**A)** 

**B)** 

**C)** 

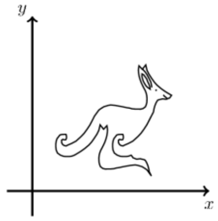
**D)** 

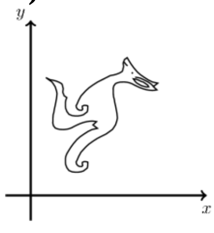
**E)** 

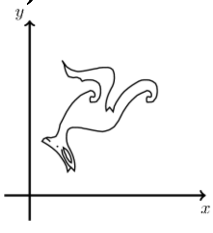
**4.** Колко са целите числа, които са по-големи от $2015.2017$ и са по-малки от $2016.2016$?

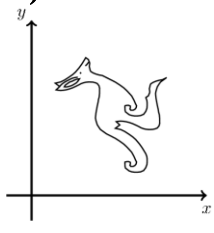
**A)** $0$ **B)** $1$ **C)** $2015$ **D)** $2016$ **E)** $2017$

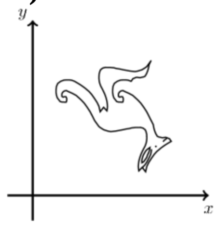
**5.** Множество от точки в равнината спрямо правоъгълна координатна система $xy$ представлява изображение на кенгуру, както е показано на фигурата. Ако координатите $x$ и $y$ на всяка точка се разменят, какъв ще е резултатът?

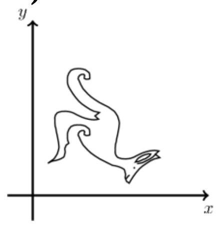



**A)** 

**B)** 

**C)** 

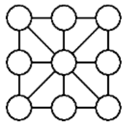
**E)** 

**D)** 

**6.** С колко най-малко равнини може да се ограничи част от пространството така, че разстоянието между кои да е две нейни точки да не надминава фиксирано число?

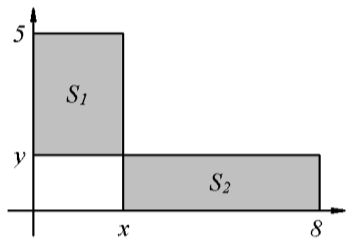
**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**7.** Кръгчетата от диаграмата са свързани с отсечки, както е показано. Разглеждаме осемте малки триъгълника, чиито върхове са кръгчета и върху страните на които няма други кръгчета. Попълнете кръгчетата с числа така, че сумата на числата във върховете на всеки триъгълник е една и съща. Колко най-много различни числа могат да се използват за това попълване?



**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** повече от 4

**8.** Правоъгълниците $S_1$ и $S_2$ на чертежа имат равни лица. Намерете отношението $\frac{x}{y}$.

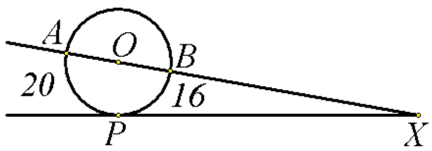



**A)** 1 **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\frac{4}{3}$ **D)** $\frac{7}{4}$ **E)** $\frac{8}{5}$

**9.** Ако $x^2-4x+2=0$, то $x+\frac{2}{x}$ е равно на:

**A)** –4 **B)** –2 **C)** 0 **D)** 2 **E)** 4

**10.** Дължините на по-малките дъги $AP$ и $BP$ от чертежа са съответно $20$ и $16$. Тогава градусната мярка на $\sphericalangle AXP$ е равна на:

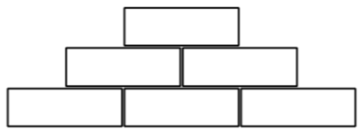



**A)** 30° **B)** 24° **C)** 20° **D)** 15° **E)** 10°

**11.** Целите положителни числа $a$, $b$, $c$ и $d$ удовлетворяват равенствата $a+2=b-2=c.2=d:2$. Кое от четирите числа $a$, $b$, $c$ и $d$ е най-голямо?

**A)** $a$ **B)** $b$ **C)** $c$ **D)** $d$ **E)** не може да се определи по единствен начин

**12.** Във всеки правоъгълник на пирамидата е записано по едно число така, че числото във всеки от правоъгълниците над основата е равно на произведение на числата, записани в двата правоъгълника точно под него. Кое от посочените в отговорите числа не може да се появи на върха, ако правоъгълниците от основата съдържат естествени числа, които са по-големи от $1$?



**A)** 56 **B)** 84 **C)** 90 **D)** 105 **E)** 220

**13.** Ако $x_1=2$ и $x_{n+1}=x_n^{x_n}$ $(n>1)$, то $x_4$ е равно на:

**A)** $2^{2^3}$ **B)** $2^{2^4}$ **C)** $2^{2^{11}}$ **D)** $2^{2^{16}}$ **E)** $2^{2^{768}}$

**14.** В правоъгълника $ABCD$ дължината на страната $BC$ е равна на половината от дължината на диагонала $AC$. Нека $M$ е такава точка от страната $CD$, че $AM=MC$. Намерете $\sphericalangle CAM$.

**A)** 12.5° **B)** 15° **C)** 27.5° **D)** 42.5° **E)** друг отговор

**15.** Правоъгълник $ABCD$ ($AB>AD$) с лице 2016 е разрязан на 56 еднакви квадрата. Дължините на страните на правоъгълника и на квадратите са цели числа. Колко са различните възможности за размерите на правоъгълника $ABCD$?

**A)** 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 0

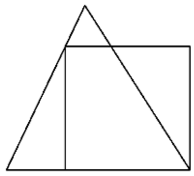
**16.** Всеки жител на един остров е или рицар, или лъжец. Рицарите винаги казват истината, а лъжците винаги лъжат. При посещение на острова един пътешественик попаднал на седем местни жители, които били седнали около лагерен огън. Всеки от тях му казал: „Аз седя между двама лъжци.“ Колко са лъжците около лагерния огън?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** не може да се определи

**17.** Уравненията $x^2+ax+b=0$ и $x^2+bx+a=0$ ($a\neq b$) имат реални корени. Ако сумата от квадратите на корените на първото уравнение е равна на сумата от квадратите на корените на второто уравнение, то $a+b$ е равно на:

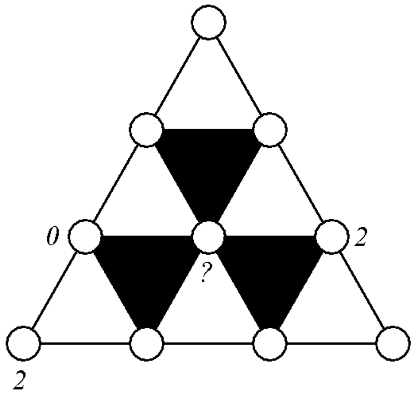
**A)** $0$ **B)** $-2$ **C)** $4$ **D)** $-4$ **E)** не може да се определи

**18.** Ако периметърът на квадрата от фигурата е равен на $4$, то периметърът на равностранния триъгълник е равен на:



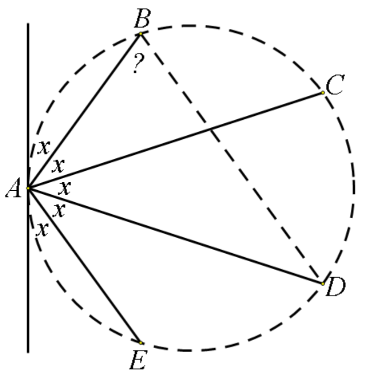
**A)** $4$ **B)** $3+\sqrt{3}$ **C)** $3$ **D)** $3+\sqrt{2}$ **E)** $4+\sqrt{3}$

**19.** Всяка от десетте точки на фигурата е отбелязана с $0$, с $1$ или с $2$. Известно е, че сумата на числата във върховете на всеки бял триъгълник се дели на $3$, докато сумата на числата във върховете на всеки черен триъгълник не се дели на $3$. Три от точките са отбелязани, както е показано на фигурата. Кои числа могат да се използват за отбелязване на централната точка?




**A)** само $0$ **B)** само $1$ **C)** само $2$ **D)** само $0$ и $1$ **E)** или $0$, или $1$, или $2$

**20.** Бетина отбелязала пет точки $A$, $B$, $C$, $D$ и $E$ върху окръжност така, че допирателната към окръжността в точката $A$ и четирите хорди, свързващи $A$ с останалите точки, образуват пет ъгъла, които са равни на $x$. Намерете градусната мярка на $\sphericalangle ABD$.




**A)** $66^\circ$ **B)** $70,5^\circ$ **C)** $72^\circ$ **D)** $75^\circ$ **E)** $77,5^\circ$

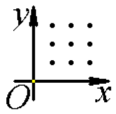
**21.** Колко различни реални решения има уравнението $\left(x^2-4x+5\right)^{x^2+x-30}=1$?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** безброй много

**22.** Четириъгълник е описан около окръжност. Периметърът на четириъгълника се отнася към дължината на окръжността, както $4:3$. Отношението на лицето на четириъгълника към лицето на кръга, определен от окръжността, е равно на:

**A)** $4:\pi$ **B)** $3\sqrt{3}:\pi$ **C)** $16:9$ **D)** $\pi:3$ **E)** $4:3$

**23**. Колко квадратни функции на $x$ имат графики, минаващи през поне три от отбелязаните точки?




**A)** 6 **B)** 15 **C)** 19 **D)** 22 **E)** 27

**24.** В правоъгълен триъгълник $ABC$ с прав ъгъл при върха $A$ ъглополовящите на острите ъгли се пресичат в точка $P$. Ако разстоянието от $P$ до хипотенузата е $\sqrt{8}$, да се намери разстоянието от $P$ до $A$.

**A)** 8 **B)** 3 **C)** $\sqrt{10}$ **D)** $\sqrt{12}$ **E)** 4

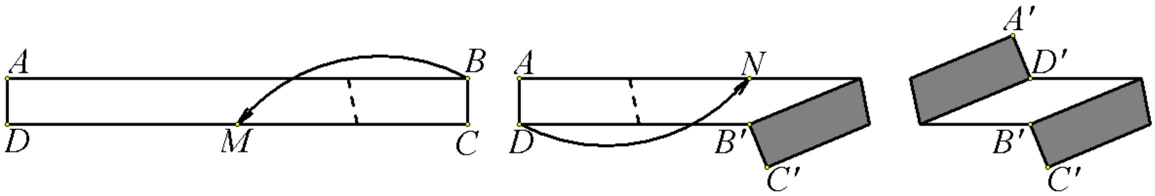
**25.** Три трицифрени числа са образувани с цифрите от 1 до 9, като всяка цифра е използвана точно веднъж. Кое от следващите числа не може да е равно на сумата на тези три числа?

**A)** 1500 **B)** 1503 **C)** 1512 **D)** 1521 **E)** 1575

**26.** Куб е разделен на шест пирамиди чрез свързване на дадена точка от вътрешността му с върховете на куба. Обемите на пет от тези пирамиди са 2, 5, 10, 11 и 14. Намерете обема на шестата пирамида?

**A)** 1 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 12

**27.** Хартиена лента във форма на правоъгълник $ABCD$ с ширина $5\,cm$ и дължина $50\,cm$ е оцветена от едната страна в бяло, а от другата – в сиво. Кристина прегъва лентата така, че върхът $B$ съвпада със средата $M$ на страната $CD$. След това тя отново прегъва лентата така, че върхът $D$ съвпада със средата $N$ на страната $AB$. Намерете лицето в квадратни сантиметри на видимата бяла част от лентата.

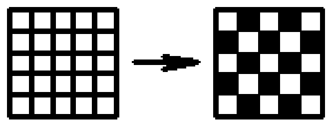



**A)** 50 **B)** 60 **C)** 62.5 **D)** 100 **E)** 125

**28**. Ани избира едно естествено число $n$ и намира сумата $s$ на всички естествени числа от 1 до $n$. Простото число $p$ дели сумата $s$, но не дели нито едно от събираемите й. Кое от посочените числа може да е равно на $n+p$?

**A)** 217 **B)** 221 **C)** 229 **D)** 245 **E)** 269

**29.** Даден е квадрат $5\times5$, разделен на 25 единични квадратчета, които първоначално са бели. Едно преобразуване на квадрата се състои в промяна на цвета на три последователни единични квадратчета в един ред или в един стълб (белите квадратчета стават черни, а черните – стават бели). Намерете възможно най-малкия брой преобразувания, които са необходими, за да се получи шахматното оцветяване вдясно от дадения квадрат.



**A)** по-малко от 10 **B)** 10 **C)** 12 **D)** повече от 12 **E)** оцветяването не е възможно

**30.** Положителното число $N$ има точно шест различни положителни делителя, включително 1 и $N$. Произведението на пет от тези делители е 648. Кое от посочените числа е шестият делител на $N$?

**A)** 4 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 24